ある確率の数式に
意味を持たせることができるか？

森島聖

平成17年1月11日

派遣教官として学生を指導しているときに，確率の試験問題で次のような問題を出題した．

3つのサイコロを投げたとき，少なくともひとつは奇数の目がでる確率を求めよ．

この問題は，確率の問題の中でも最も基本的な問題であり，高等学校(中学校)の数学でも必ずといっていいほど出題される．一般的な解法は，余事象の確率を求めて，1から引く．すなわち，1から，全部が偶数になる確率 $\frac{1}{8}$ を引くことによって答えの $\frac{7}{8}$ を導き出す方法であろう．

$$1-\left(\frac{3}{6}\right)^3=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

しかし，公式にあてはめた定番の解答なんてつまらない．学生の数だけそれぞれの解答があるはずだ．ある学生が，次のような答案を書いた．

$$\frac{3\cdot 6\cdot 6+3\cdot 3\cdot 6+3\cdot 3\cdot 3}{6^3}=\frac{189}{216}=\frac{7}{8} \tag{1}$$

なるほど，この答案の感覚としては，分母はすべての起こりうる場合の数で，分子で，それぞれ，奇数が1つ出る場合と奇数が2つ出る場合と奇数が3つ出る場合にわけてそれらの総和をとったというわけだ．答えは $\frac{7}{8}$ で合っている．しかし，これはたまたま答えが合ったわけで，答えを導き出す式は(おそらく)間違っている(何故，おそらくなのかは最後に述べる)．この式の考え方では典型的な間違いをしてる．

1. 分子の総和のそれぞれは，あくまでも奇数が k 個 $(k=1,2,3)$ 以上でる場合であり，例えば，総和における一つ目の，奇数が1つでる場合は，もう2つのサイコロについては，6×6 ですべての目がでる場合を考えており，もちろん，奇数が出ることもある．すなわち，それぞれの分子の総和は排反ではない．
2. 分子の総和のそれぞれは，サイコロに順序付けをしており，どのサイコロが奇数の目がでるということについては考えていない．

この 2 点から，典型的な余事象を用いる解法ではなく，場合の数でこの問題の解法の式を書くとすれば,

$$\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot {}_3\mathrm{C}_1 + 3\cdot 3\cdot 3\cdot {}_3\mathrm{C}_2 + 3\cdot 3\cdot 3\cdot {}_3\mathrm{C}_3}{6^3} = \frac{189}{216} = \frac{7}{8} \tag{2}$$

となる．総和の一つ目は，奇数が 1 つだけ出る場合の数，総和の二つ目は，奇数が 2 つだけ出る場合の数，総和の三つ目は，すべて奇数が出る場合の数であり，もちろん排反でかつすべての場合を網羅している．(1) と (2) の計算結果が，たまたま等しくなったということで，間違った式 (1) の答案は，もちろん点数を与えなかった．答えは合ってても，考え方が間違っていたら意味がない．数学で大事なのは，論理思考，考え方である．学生に，たまたま答えが合う問題だったということを説明するために，サイコロの数を変えれば，答えが違うということを示そうと思い，サイコロが 2 個の場合，サイコロが 4 個の場合をそれぞれ比較してみると，なんと両方の場合でも答えが一致した．さらに，試しに，計算機で 100 個のサイコロの場合まで計算して，(1) と (2) の両方の考え方から導き出された答えを比較すると，すべて一致した．何故だろうと思い，とりあえず一般に n 個のサイコロの場合を考え,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} 3^n {}_n\mathrm{C}_i}{6^n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 3^i \times 6^{n-i}}{6^n} \tag{3}$$

が，成り立つかどうか，証明に取りかかった．若干の時間を要して,

$$\sum_{i=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_i = 2^n - 1 \tag{4}$$

を証明できれば，(3) が正しいことが証明されるところまで辿り着いた．しかし, (4) は，順序付けされた n 個のスイッチのオン，オフの組合せ (すべてオフの場合を除く) の設定を考えると，直感的に明らかである．左辺の $i = k$ の場合は，k 個のスイッチがオンになって，それ以外はオフという設定を考えればよい．

以上により，今回の確率の問題は，一般的にサイコロの数を n 個に拡張しても, (1) 同様,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} 3^i \times 6^{n-i}}{6^n} \tag{5}$$

の公式で成り立つわけだ．さて，たまたま 3 個の場合にのみ成り立ったと誤解していたつもりが，一転，一般的にも成り立つということがわかった．そうなれば, (2) の式や (3) の左辺が，それぞれ奇数が一つだけでる場合の数，二つだけでる場合の数，云々といったように言葉で数式が説明できるように，(5) にも納得できるような説明づけができるのではないかという疑問が残る．いろいろと，考えて見

たが，私の鈍い頭では，今のところ説明づけができない．もし，この数式に意味を持たせることができて，(1) の答案を作成した学生がきちんと説明することができたなら，間違いなく満点をつけるであろう．

ちなみに，奇数の目が出る場合というのは，そうでない場合 (偶数) と同じ割合で出る特異な例であり，これを少しかえて，

n 個のサイコロを投げたとき少なくとも一つは 3 の倍数の目が出る確率を求めよ．

とすると，3 の倍数の目が出る確率と，そうでない目が出る確率は異なる．この時は，一般的に，任意の $n\,(\geq 2)$ に対して，

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^i \times 4^{n-i}{}_n\mathrm{C}_i}{6^n} \neq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^i \times 6^{n-i}}{6^n}$$

であり，結局のところ，奇数を考えたときは，背景として (4) が成り立つので，たまたま (3) が成り立つわけで，やはり (5) に意味を持たせることはできないような気がする．

果たして，如何なものか．