ある確率の数式に 意味を持たせることができるか？ (その2)

森島聖

平成17年1月19日

派遣教官として学生を指導しているときに，確率の試験問題で次のような問題を出題した．

3つのサイコロを投げたとき，少なくともひとつは奇数の目がでる確率を求めよ．

ある学生が，次のような答案を書いた．

$$\frac{3\cdot 6\cdot 6+3\cdot 3\cdot 6+3\cdot 3\cdot 3}{6^3}=\frac{189}{216}=\frac{7}{8} \tag{1}$$

私は採点をしていて，この数式に意味を見いだすことができなかった [1]．しかし，この答案を書いた学生から，どういう経緯でこの数式を書いたのかを尋ねてみると，すんなりと納得のいく説明，つまり，この数式に意味づけをしていただいた．やはり，**私の頭が鈍かった** [1]．

学生が示してくれた意味づけは以下のとおりである．サイコロに順序付けをして，

- $3\cdot 6\cdot 6$ は，一つ目のサイコロが奇数で，あとの二つは何でもよい場合の数．
- $3\cdot 3\cdot 6$ は，一つ目のサイコロが偶数で，二つ目のサイコロは奇数，三つ目のサイコロは何でもよい場合の数．
- $3\cdot 3\cdot 3$ は，一つ目のサイコロが偶数で，二つ目のサイコロも偶数，三つ目のサイコロは奇数の場合の数．

なるほど，サイコロに順序付けをしてから，序列順に，何の目でもよい場合，奇数になる場合，偶数になる場合で場合わけをするわけだ (ただし，奇数は必ず一つ以上出るので，ひとつ目のサイコロは奇数になる場合から始める)．これら，三つの場合分けは，それぞれ排反であるし，すべての場合を網羅している．もちろん，

この答案を書いた学生には満点をつけた．ひとつの問題には，いろいろな解き方がある．確かに，

$$1-\left(\frac{3}{6}\right)^3 = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

が一番定番な解法なのだが，この問題を解く目的にもよるが，数学の問題を解くという観点からは，いろいろな解き方，考え方があり，それらを一蹴してしまうのではなく，ひとつひとつの解法を吟味する必要がある．また，教官といえども，学生から学ぶものは多い．今回の例がその典型的な例である．

さて，前回 [1] は，一般に n 個のサイコロの場合でも，同様に，

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 3^i \times 6^{n-i}}{6^n} \tag{2}$$

の公式で成り立つことを証明したが，今回の意味づけ同様，n 個のサイコロのうち，

- 一つ目のサイコロが奇数で，あとの $n-1$ 個のサイコロは何でもよい場合の数.

- 一つ目のサイコロが偶数，二つ目のサイコロが奇数で，残りの $n-2$ 個のサイコロは何でもよい場合の数.

- 二つ目のサイコロまでが偶数，三つ目のサイコロが奇数で，残りの $n-3$ 個のサイコロは何でもよい場合の数.

$$\vdots$$

- k 個目のサイコロまでが偶数，$k+1$ 個目のサイコロが奇数で，残りの $n-(k+1)$ 個のサイコロは何でもよい場合の数.

$$\vdots$$

- $n-1$ 個目のサイコロまでが偶数で，n 個目のサイコロが奇数の場合の数.

の総和をとることによって，(2) に意味づけができる．

前回 [1] は，奇数の目が出る場合というのは，そうでない場合 (偶数) と同じ割合で出る特異な例であり，これを少しかえて，

n 個のサイコロを投げたとき少なくとも一つは 3 の倍数の目が出る確率を求めよ．

とすると，3 の倍数の目が出る確率と，そうでない目が出る確率は異なり，この時は，一般的に，任意の $n\,(\geq 2)$ に対して，

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^i \times 4^{n-i}{}_n\mathrm{C}_i}{6^n} \neq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^i \times 6^{n-i}}{6^n}$$

であると記述したが，今回の意味づけ (考え方) を応用すると，

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} 2^i \times 4^{n-i}{}_n\mathrm{C}_i}{6^n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 2 \times 4^{i-1} \times 6^{n-i}}{6^n} \tag{3}$$

が成り立つ．そして，(3) をさらに簡約化して，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_i}{2^i} = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \tag{4}$$

となる．今度は (4) の公式に意味付けをすることができるだろうかという新たな疑問が残る．式としてはもちろん正しいのだが，今回のサイコロを投げる試行や前回のスイッチのオンオフの組合せ [1] と同様，”言葉 ”で説明できないだろうか．いわゆる ”感覚的 ”な証明である (厳密には証明と言い切っていいのかという疑問は残るが)．また，意味付けとは別に，[1] の，

$$\sum_{i=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_i = 2^n - 1 \tag{5}$$

の式同様，左辺は n が大きくなるにつれて，組合せ ${}_n\mathrm{C}_i$ の階乗計算が大変になるのに対し，右辺は指数の 2 進数展開をすることによって，左辺よりも計算量を少なく抑えることができる．

今度は ”理想的な ”一般化したサイコロ (現実に多面体として実現可能かどうかは別として) を考察してみる．目の数を 1 から $p+q$ として，考える確率の事象の標本数を p とする．この一般化したサイコロを，n 個投げて，少なくとも 1 つはこの事象が起こる場合の確率を同様に考えると，

$$\sum_{i=1}^{n} p^i \cdot q^{n-i}{}_n\mathrm{C}_i = \sum_{i=1}^{n} p \cdot q^{i-1} \cdot (p+q)^{n-i} \qquad p, q \text{ は正の整数} \tag{6}$$

が導き出される．さらに，(6) を簡約化すると，

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^i {}_n\mathrm{C}_i = \left(\frac{p}{q} + 1\right)^n - 1 \tag{7}$$

となる，今，p と q は，正の整数なので，(7) は，さらに，

$$\sum_{i=1}^{n} a^i{}_n\mathrm{C}_i = (a+1)^n - 1 \qquad a \text{ は非負の有理数} \tag{8}$$

とあらわせる ($a = 0$ は代入すれば明らか)．ここから先は，計算機実験だけだが，a が負の有理数のときもどうやら (8) は成立しそうである．しかし，無理数まで拡張すると，例えば，$n = 100$，$a = \pi$ のとき，計算機で計算させると成り立たないことがわかった．

サイコロの単純な確率の問題から出発して，いろいろ試行錯誤しているうちに，数式 (8) が導き出された．今のところ，数式 (8) のもつ意味合い，意味付けはわからないが，なにはともあれ数式 (8) は成立する．

たかが数式，されど数式．ひとつの数式からいろいろな数学的対象物や，日常生活のある話題にまで話が膨らむ．こういうところに数学の楽しみを見い出している今日この頃である．

文献

[1] 森島聖：ある確率の数式に意味を持たせることができるか？，2005.